

На правах рукописи

СУЮЧЕВА Диляра Таировна

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКВАЖИН
С ПОТОКОМ ПОДЗЕМНЫХ ВОД**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2008

Работа выполнена кафедре моделирования экологических систем
Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Скворцов Эдуард Викторович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Маклаков Дмитрий Владимирович

кандидат физико-математических наук,
доцент
Шевченко Денис Вячеславович

Ведущая организация: Институт механики и машино-
строения
Каз. НЦ РАН, г. Казань

Защита состоится 19 июня 2008 г. в 14 часов 30 минут на заседании дис-
сертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном уни-
верситете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “___” мая 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А. Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Сложность проблемы защиты подземных вод от загрязнения со временем лишь возрастает. В насыщенных водой пластах возможны природные региональные потоки, которые способны переносить загрязнения на большие расстояния, в результате чего образуются крупные ареалы загрязнений. Поэтому проводят мероприятия по их локализации и ликвидации. Одним из способов защиты подземных вод является воздействие на поток через скважины путем закачки в пласт или откачки из пласта воды. В частности, таким образом на пути потока можно создать гидродинамические барьеры, препятствующие продвижению загрязнений.

Может представлять интерес сооружение ряда нагнетательных скважин вниз по потоку загрязненных вод с последующей непрерывной закачкой в них чистой воды, подводимой из независимого внешнего источника. Также возможно сочетание нагнетательной скважины с откачивающими, при этом откачиваемая вода, предварительно пройдя очистку, непрерывно подается в нагнетательные скважины.

Особый интерес представляет определение огибающей зоны захвата, что важно при использовании системы скважин для защиты подземных вод от загрязнения. При двумерном течении огибающая зоны захвата определяется как линия, которая отделяет воду, текущую мимо скважины, от воды, текущей к скважине.

Анализ результатов известных работ показал, что несмотря на значительное внимание к данной тематике, течения со взаимодействием природного потока и скважин, как правило, изучались без исследования их возможного перехода от одной гидродинамической схемы к другой.

Цель работы – исследование ряда течений со взаимодействием плоско-параллельного потока и скважин во всем диапазоне изменения параметров течения: нахождение характерных линий тока течения – гидродинамических барьеров для загрязненной жидкости и определение безразмерных характерных расходов скважин, по достижении которых происходит перестройка течения с переходом от одной его гидродинамической схемы к другой.

Научная новизна результатов.

1. Исследовано взаимодействие плоско-параллельного потока загрязненной жидкости с двумя произвольно расположенными в потоке источниками одинаковых расходов. Найдено аналитическое выражение для такого безразмерного критического расхода источника, что при меньшем расходе загрязненная жидкость прорывает гидродинамический барьер, создаваемый источниками. Показано, что кривая зависимости критического расхода от угла, определяющего ориентацию источников в потоке, близка к отрезку прямой.

2. Исследовано взаимодействие потока загрязненной жидкости с источником и стоком одинаковых по модулю расходов при их произвольном расположении в потоке. Аналитически найдены границы-барьеры для загрязненного потока и характерный расход стока, при котором возникает переток между источником и стоком. Определена концентрация загрязнителя в стоке при рециркуляции жидкости из источника в сток с ее очисткой на поверхности земли.
3. Изучено взаимодействие потока незагрязненных подземных вод с водозаборной скважиной (стоком), в окрестности которой расположен источник загрязнения произвольного расхода. Получена фазовая диаграмма, при фиксированных размещении скважины и источника определяющая диапазон изменения расхода водозабора, в котором попадание в водозабор загрязнителя исключается.
4. Проанализировано взаимодействие загрязненного потока с расположенной поперек потока прямолинейной батареей n источников (расстояния между источниками одинаковы, их расходы равны). Для случаев $n = 5 - 7$ построены границы барьеров при всех возможных схемах течения. Для случаев $n = 5 - 9$ найдены безразмерные критические расходы источника, при достижении которых происходят прорывы загрязненной жидкости между источниками. Показано, что возникающие один за другим прорывы последовательно удаляются от середины батареи к ее периферии, а с ростом числа источников и уменьшением расхода источника эффективность барьеров снижается из-за появления множественных прорывов барьера загрязненным потоком.
5. Исследовано взаимодействие потока загрязненной жидкости со скважиной, на контуре которой задано постоянное давление. Получено аналитическое выражение для координат границы течения от скважины при произвольной величине ее безразмерного расхода. Найден критический расход скважины, при котором загрязненный поток достигает ее контура. Показано, что при малых расходах течение в окрестности скважины существенно неоднородно. Найдена концентрация жидкости, вытекающей из скважины, при расходах ниже критического.

Практическое значение работы. Работа носит теоретический характер. Вместе с тем, ее результаты могут оказаться полезными для практических целей:

- при предварительной оценке эффективности защиты подземных вод от загрязнения способом создания в потоке гидродинамических барьеров через систему скважин (могут быть оценены ареалы защищенных областей и риски появления прорывов барьера загрязненным потоком);

- при оценке риска попадания загрязнителя из источника в водозабор, находящийся в потоке подземных вод;
- при оценке риска попадания загрязнителя в нагнетательную скважину, находящуюся в загрязненном потоке.

Достоверность результатов следует из того, что в рамках принятых в работе физических допущений с применением классической модели подземной гидродинамики результаты получены либо строгими аналитическими методами, либо численно-аналитически и подтверждаются их совпадением с известными для частных случаев теоретическими данными.

Апробация работы. По мере их получения основные результаты докладывались и обсуждались на Международной научной конференции «Геометрическая теория функций, краевые задачи и их приложения» (Казань, 18 – 24 марта, 2002г.), на Международном семинаре «Нелинейное моделирование и управление» (г. Самара, 2004), на VI республиканской научной конференции «Актуальные экологические проблемы Республики Татарстан» (г. Казань, 2004), на Всероссийской конференции «Современные аспекты экологии и экологического образования» (г. Казань, 2005 г.), на итоговых научных конференциях КГУ (2005, 2006, 2008 г.г.). Работа в целом докладывалась на научном семинаре кафедры аэрогидромеханики КГУ и отделения механики НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева КГУ (г. Казань, 2007г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1-8], список которых приведен в конце автореферата; работы [6], [8] опубликованы в изданиях, рекомендованных экспертным советом ВАК по математике и механике.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, постановки задачи, шести параграфов, примечания, заключения и списка литературы. Работа изложена на 80 страницах, содержит 28 рисунков. Список литературы насчитывает 35 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описана используемая в работе схематизация исследуемого течения. Согласно ей считается, что скважины расположены в однородном и изотропном пласте единичной толщины, где существует плоско-параллельный природный поток, жидкость однородна и несжимаема, справедлив закон Дарси, фильтрация стационарна и двумерна, скважины имитируются источниками и стоками.

В этих условиях ряд авторов использовал теорию функций комплексного переменного для развития аналитических и полуаналитических методов при оценке воздействия скважин на поток. Дан обзор результатов, полученных такими авторами, как Crist J.A., Goltz M.N., Huang J., Shan C., Javandel I., Tsang C.-F., Strack O., Erdmann J.B., Скворцов Э.В., Кузьмин Р.С.

В соответствии с принятой в работе схематизацией исследуемого фильтрационного течения это течение потенциально и описывается комплексным потенциалом. Функция тока и потенциал такого течения удовлетворяют линейному уравнению Лапласа, и при нахождении комплексного потенциала для конкретного течения может быть использован принцип суперпозиции.

Формально комплексный потенциал в компактном виде неявно содержит в себе всю необходимую информацию о гидродинамической сетке течения. Однако извлечь эту информацию в действительных переменных и представить ее в явном виде, вообще говоря, удастся лишь для ограниченного числа задач. Это объясняется тем, что их параметрический анализ сопряжен с решением нелинейных уравнений и систем таких уравнений, которым, в частности, подчиняются координаты искомых линий тока фильтрационного течения и его характерные параметры.

Во введении кратко описываются основные результаты работы. Систематическое изложение результатов предваряет краткая общая **постановка задачи**.

Согласно ей изучается взаимодействие плоско-параллельного потока жидкости, который может быть загрязнен, со скважинами, моделируемыми источниками, стоками или окружностью постоянного давления, соответствующей контуру скважины. Полагается, что загрязненное и незагрязненное течения гидродинамически одно от другого не отличаются.

Пусть X, Y – координаты точки плоскости, v_x, v_y – проекции скорости течения, причем $v_x = v, v_y = 0$ – проекции скорости в бесконечно удаленной точке. При указанных выше условиях течение жидкости потенциально и описывается потенциалом скорости фильтрации Φ и функцией тока Ψ . Вводится комплексный потенциал течения $W(Z) = \Phi + i\Psi$, где $Z = X + iY$, i – мнимая единица. При известной величине $W(Z)$ производная $dW/dZ = -v_x + iv_y$ определяет значение скорости течения в произвольной точке рассматриваемой области. Уравнение $dW/dZ = 0$ позволяет найти значения координат точек, в которых скорость течения обращается в нуль (точек нулевой скорости). Соотношения $W = W(Z)$ и $dW/dZ = 0$ служат основой для анализа течения.

В §1 исследуется фильтрация под действием пары источников одинакового расхода, произвольно расположенных в потоке загрязненной жидкости. В безразмерном виде приводится комплексный потенциал течения (далее Q – безразмерный расход).

Из условия равенства нулю комплексно-сопряженной скорости находятся координаты точек нулевой скорости, а затем – явная зависимость абсцисс линий тока, проходящих через эти точки, от их ординат. На схеме поясняется, как течение от источников создает гидродинамический барьер для набегающего потока, и из геометрических соображений выводится нелинейное трансцендентное уравнение – связь между величиной крити-

ческого расхода $Q = Q_0$ источника и углом α , характеризующим расположение источников относительно направления потока:

$$\frac{2Q_0 y_1}{\cos 2\alpha - 2y_1^2} = \operatorname{tg} \frac{2y_1}{Q_0},$$

где

$$y_1 = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \left[Q_0^4 - 2Q_0^2 \cos 2\alpha + 1 \right]^{1/2} - Q_0^2 + \cos 2\alpha \right\}^{1/2}$$

При расходе источника ниже критического происходит прорыв барьера потоком, и реализуется схема течения с двумя защищенными от загрязненного потока областями.

Введением параметрического переменного

$$t = \cos 2\alpha - 2y_1^2$$

удается явно выразить через него как критический расход Q_0 , так и угол α , и тем самым получить аналитическое решение приведенного выше уравнения:

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 1: \quad Q_0 &= \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} g(t) \right], \\ -1 \leq t \leq 0: \quad Q_0 &= \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[\pi + g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} \{ \pi + g(t) \} \right], \end{aligned}$$

где

$$g(t) = \operatorname{arctg} \left[(1-t^2)^{1/2} t^{-1} \right]$$

Показано, что кривая зависимости $Q = Q_0(\alpha)$ близка к расположенному между осями Q_0 и α отрезку прямой с угловым коэффициентом $-2/\pi$ (рис. 1). Поэтому практически критический расход допустимо находить по формуле $Q_0 = 1 - 2\alpha/\pi$.

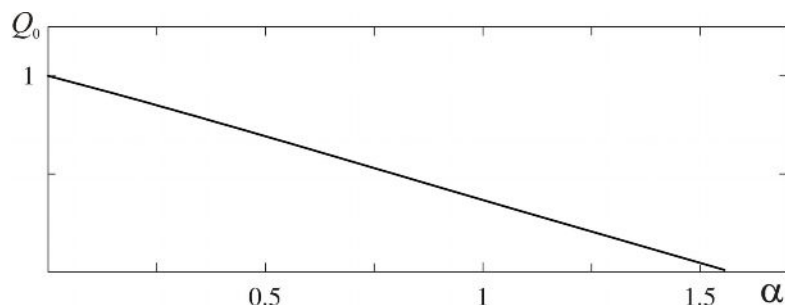


Рис.1. График зависимости критического расхода течения от угла α .

В конце параграфа приводятся рисунки (см., например, рис. 2), на которых изображены границы для загрязненного потока при различных значениях угла α и расхода источника Q .

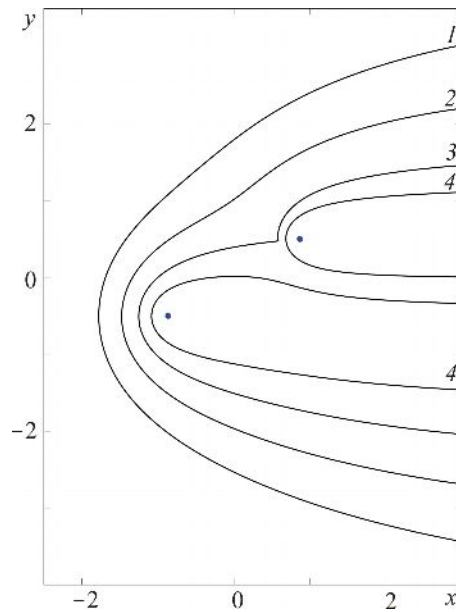


Рис. 2. Границы для загрязненного потока при $\alpha = \pi/3$. Кривые 1 – 4 соответствуют значениям параметра $Q=0.7, 0.5, Q_0=0.336, 0.2$.

В §2 рассматривается взаимодействие загрязненного потока с парой источник-сток (с равными по модулю расходами Q), также произвольно расположенными относительно направления потока. Такая задача представляет интерес в связи с используемым практически способом извлечения загрязненной воды через откачивающую скважину на поверхность, ее очисткой и закачкой в пласт через нагнетательную скважину. При подобной рециркуляции не требуется подводить к нагнетательной скважине воду из независимого поверхностного источника.

При определении координат точек нулевой скорости оказывается, что абсциссы этих точек могут быть как положительными, так и отрицательными. Найдено условие $Q = -\sin \alpha$, при котором абсцисса меняет знак. Получены уравнения, позволяющие по заданным ординатам построить проходящие через точки нулевой скорости характерные линии тока течения, которые являются барьерами для загрязненного потока. При этом возможны три схемы течения, соответствующие значениям расхода $Q > Q_0$, $Q = Q_0$ и $Q < Q_0$. В последнем случае переток жидкости между источником и стоком прекращается (рис.3).

Получено трансцендентное уравнение для определения характерного расхода Q_0 как функции угла α :

$$\operatorname{tg} \frac{y_1}{Q_0} = -\frac{y_1}{Q_0 + \sin \alpha},$$

где

$$y_1 = \left[(Q_0^2 + Q_0 \sin \alpha + \frac{1}{4})^{1/2} - Q_0 \sin \alpha + \frac{1}{2} - \sin^2 \alpha \right]^{1/2}$$

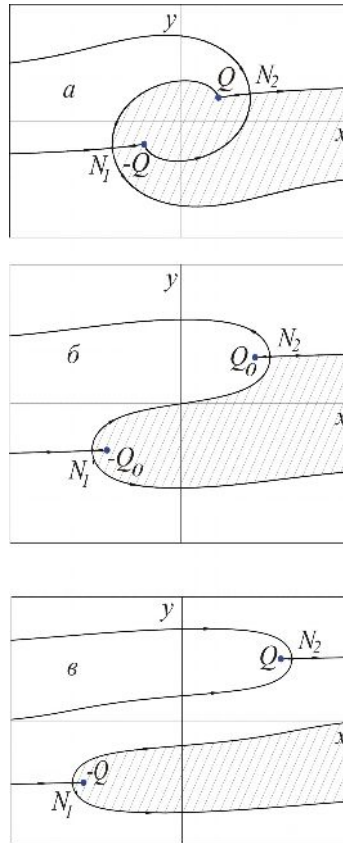


Рис. 3. Схема характерных линий тока, проходящих через точки нулевой скорости: a – при расходе $Q > Q_0$, $б$ – при расходе $Q = Q_0$, $в$ – при расходе $Q < Q_0$.

Для варианта $Q \leq -\sin \alpha$ вводится параметрическое переменное

$$s = \frac{y_1}{Q_0}, \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi}{2},$$

позволяющее выразить через него величины Q_0 и α :

$$Q_0 = \frac{\sin s}{s + \sin s \cos s}, \quad \alpha = \arcsin \frac{\sin s + s \cos s}{s + \sin s \cos s},$$

для варианта $Q > -\sin \alpha$ вводится параметр u такой, что

$$\pi - u = \frac{y_1}{Q_0}, \quad 0 \leq u \leq \pi/2$$

В этом случае получены следующие зависимости:

$$Q_0 = \frac{\sin u}{\pi - u - \sin u \cos u}, \quad \alpha = \arcsin \frac{(\pi - u) \cos u - \sin u}{\pi - u - \sin u \cos u}$$

Найдено значение угла α , при котором характерный расход Q_0 достигает максимума. Построена кривая зависимости $Q_0 = Q_0(\alpha)$ (рис. 4). Область, заключенная между отрезками осей $Q_0 = 0$, $\alpha = 0$ и кривой $Q_0 = Q_0(\alpha)$, соответствует случаю отсутствия перетока жидкости между источником и стоком.

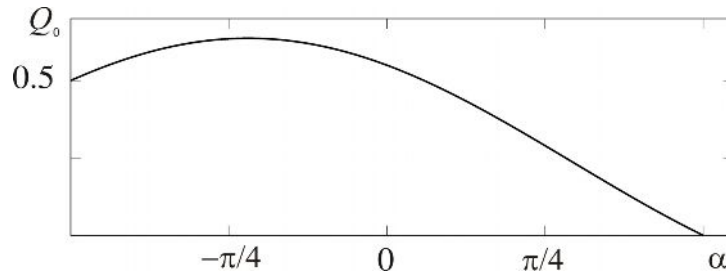


Рис. 4. График зависимости характерного расхода стока Q_0 от угла α при взаимодействии потока с системой источник-сток.

На рис.5 показаны границы областей, защищенных от загрязненного потока, при различных значениях угла α и расхода Q .

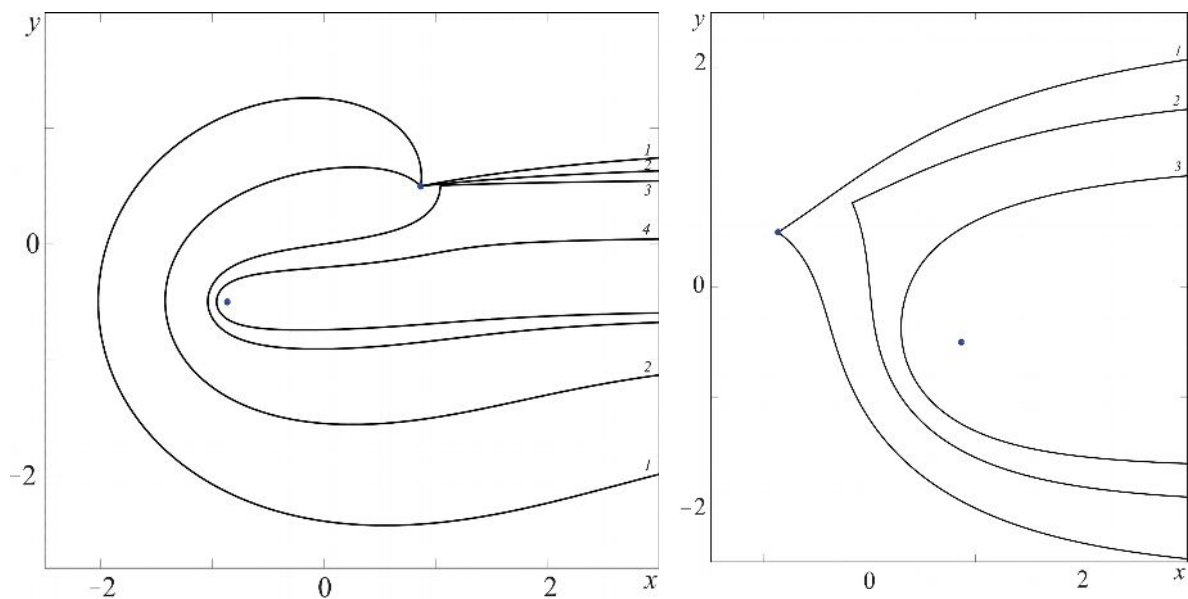


Рис. 5. Границы для загрязненного потока: слева – при $\alpha = \pi/3$, кривые 1 – 4 соответствуют значениям параметра $Q = 1.8, 0.7, Q_0 = 0.188, 0.1$; справа – при $\alpha = -\pi/3$, кривые 1 – 3 соответствуют значениям параметра $Q = 1, Q_0 = 0.613, 0.45$.

Далее определяется концентрация загрязнителя в жидкости как доля загрязненной жидкости в общем расходе стока, извлекаемой на поверхность через сток. Анализируется поведение величины концентрации как функции параметров Q и α . В частности, на рис.6 видны диапазоны величины Q , при которых для фиксированных значений угла α концентрация загрязнителя равна единице. При увеличении параметра Q значение концентрации падает, стремясь к нулю.

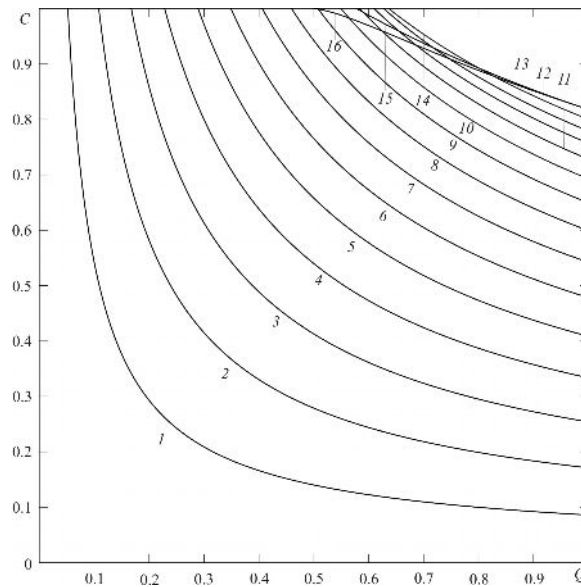


Рис. 6. Графики зависимости концентрации $C = C(Q, \alpha)$ загрязнителя в жидкости, извлекаемой на поверхность через сток. Кривым 1 – 16 соответствуют значения угла $\alpha = \pi/2 - \pi k/20$ ($k = 1 - 13$), $-\arcsin 2/\pi$, $-\pi/2$, $-\pi/2$

В §3 задача, аналогичная рассмотренной в §2, решается для случая взаимодействия загрязненного потока с источником и двумя стоками, расположенными симметрично относительно оси абсцисс на прямой, перпендикулярной направлению потока.

Модуль расхода источника равен сумме расходов стоков. Получены алгебраические уравнения четвертой степени, описывающие зависимость абсцисс границ-барьеров для загрязненного потока от их заданных ординат, а также трансцендентное уравнение для определения величины характерного безразмерного расхода Q_0 (его смысл тот же, что и в §2). Численно найдены координаты границ для загрязненного потока при различных значениях Q , величина Q_0 и концентрация жидкости, извлекаемой на поверхность через стоки.

В §4 изучается взаимодействие потока незагрязненных подземных вод с водозаборной скважиной, в окрестности которой расположен источник загрязнения. Требуется ответить на вопрос, попадет загрязнитель в отбираемую воду или нет. В соответствии с этим рассматривается течение под действием произвольно расположенных в потоке стока и источника с произвольными безразмерными расходами Q_2 и $-Q_1$ соответственно.

На основе выражения для комплексного потенциала течения выписаны формулы для определения безразмерных координат двух точек x_1, y_1 и x_2, y_2 нулевой скорости течения.

Пусть значение расхода источника фиксировано, а расход стока достаточно мал. Тогда между стоком и источником нет перетока, и в сток загрязненная жидкость не попадает. Если расход стока увеличить, то при его некотором критическом значении Q_2^* такой переток возникает, и сущест-

вует линия тока, проходящая через обе точки нулевой скорости. Функция тока в этих точках имеет одно и то же значение. Отсюда следует нелинейное уравнение в комплексных величинах для определения критического расхода стока Q_2 при заданных значениях расхода источника загрязнения Q_1 и угла α , определяющего расположение стока и источника в потоке:

$$\psi_1[x_1(Q_1, Q_2^*, \alpha), y_1(Q_1, Q_2^*, \alpha)] = \psi_2[x_2(Q_1, Q_2^*, \alpha), y_2(Q_1, Q_2^*, \alpha)]$$

Если угол $\alpha = \pi/2$, загрязненная жидкость из источника попадает в сток при любых значениях Q_1 и Q_2 . При $\alpha = -\pi/2$ возможность загрязнения стока исследована аналитически. При $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ критический расход стока находился численно. В конце параграфа представлена фазовая диаграмма, демонстрирующая зависимость величины критического расхода стока (водозабора) Q_2^* от заданного расхода источника Q_1 при фиксированных значениях угла α . Эта диаграмма определяет диапазон изменения расхода водозабора, в котором гарантируется его защита от загрязнения (см. рис.7).

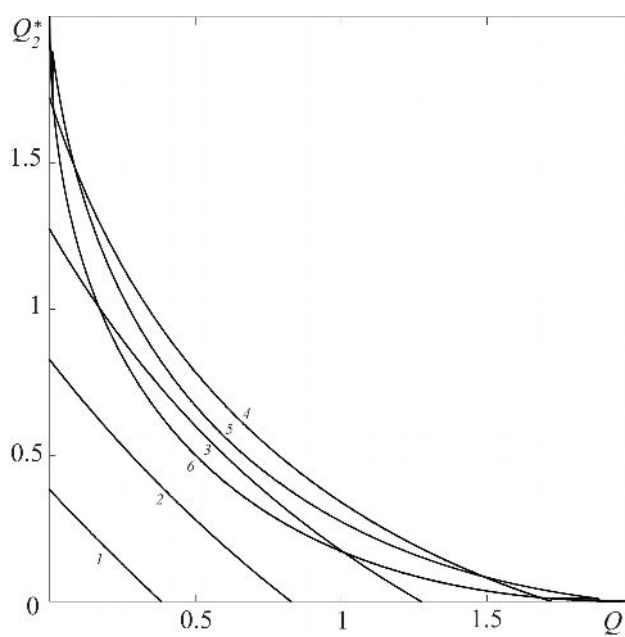


Рис. 7. Графики зависимости критического расхода водозабора Q_2^* от расхода источника загрязнения Q_1 для различных углов α : кривые 1 – 6 соответствуют значениям $\alpha = \pi/3, \pi/6, 0, -\arcsin 2/\pi, -1.24, -\pi/2$.

В §5 рассматривается задача о взаимодействии загрязненного потока с батареей n источников одинакового расхода, расположенных на прямой поперек направления потока на равных расстояниях один от другого. Эта задача привлекала внимание исследователей, но решения для произвольного числа n не получила. Достаточно полно изучены лишь случаи $n = 2, 3, 4$.

При $n > 4$ возможны два и более прорыва загрязненного потока между источниками, и представляет интерес выяснить, где и в какой последовательности при уменьшении безразмерного расхода Q источника возникают такие прорывы. Течения при четном и нечетном числе источников имеют свои особенности и потому рассматриваются отдельно.

В п. 5.1 исследуется случай четного числа источников. Выписано соответствующее уравнение для определения координат точек нулевой скорости течения.

Оно является алгебраическим степени n относительно комплексной переменной z . Корни этого уравнения, которые находятся численно, соответствуют координатам точек нулевой скорости. При достаточно большом значении Q две такие точки располагаются на оси x , а остальные – попарно симметрично относительно оси x , и существует единственный гидродинамический барьер Γ для загрязненного потока. Ввиду симметрии течения рассматривается область $y \geq 0$. Значение критического расхода Q_1 соответствует первому прорыву потока между источниками и находится из условия слияния двух действительных корней уравнения. Функция тока представлена рекуррентной формулой, позволяющей вычислить эту функцию для произвольного n и затем получить алгебраическое уравнение степени n для определения абсциссы x кривой Γ при заданном значении ординаты y .

Дальнейший анализ течения иллюстрируется случаем $n = 6$. Вычисления показывают, что при $Q = Q_1$ точки нулевой скорости, не находящиеся на оси x , расположены внутри барьера Γ . При уменьшении расхода Q от Q_1 до значения второго критического расхода Q_2 возникает струйка загрязненной жидкости, примыкающая к оси x , а уравнение барьера Γ несколько видоизменяется. Где будет осуществляться второй прорыв барьера, – между ближайшим к оси x первым и вторым либо между вторым и третьим источниками, заранее неизвестно. Из анализа геометрической схемы течения следует, что при реализации второго прорыва между первым и вторым источниками должен существовать действительный корень Q системы двух нелинейных уравнений, свидетельствующий о выходе на границу Γ еще одной точки нулевой скорости. Вычисления показывают, что такой корень $Q_2 < Q_1$ существует, так что при $Q_3 \leq Q < Q_2$ возникает вторая струйка загрязненной жидкости, прорывающая барьер. Значение $Q = Q_3$ отвечает третьему прорыву между вторым и третьим источниками и находится из соответствующей системы двух нелинейных уравнений. При $Q < Q_3$ появляется третья струйка загрязненной жидкости. Для всех вариантов схем течения построены кривые – барьеры для загрязненного потока и найдены значения Q_1, Q_2, Q_3 (см. рис. 8).

Описанный подход к определению критических расходов источников в случае $n = 6$ может быть аналогичным образом применен и к обще-

му случаю $n = 2m$. Расчеты показывают, что при $n = 8$ первый – четвертый прорывы появляются сначала вдоль оси x , затем между первым и вторым, вторым и третьим, третьим и четвертым источниками. Таким образом, прослеживается тенденция последовательного осуществления прорывов от середины батареи источников к ее периферии, причем соответствующие величины критических расходов, уменьшаясь, постепенно сближаются. Отмечено, что это значение стремится к известному значению критического расхода $Q = 1/\pi$ для случая предельной схемы, когда $n \rightarrow \infty$.

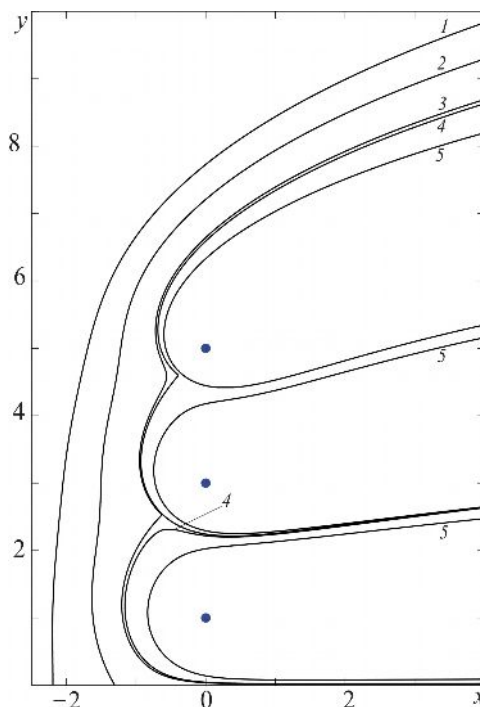


Рис. 8. Границы для потока в случае батареи шести источников. Кривые 1 – 5 соответствуют значениям параметра $Q=0.5, 0.383, Q_2=0.351, Q_3=0.346, 0.3$.

В п. 5.2 изучается случай нечетного числа источников. В отличие от предыдущего случая первый прорыв барьера при $y \geq 0$ происходит между первым и вторым источниками. Дальнейший анализ от описанного выше принципиально не отличается и иллюстрируется случаем $n = 5$. Численные расчеты с определением критических расходов проведены для $n = 5, 7, 9$; для случаев $n = 5, 7$ построены кривые-барьеры для всех возможных схем течения (см. в качестве примера рис. 9). Как и в случае четного числа источников, вычисления подтверждают предположение о том, что при последовательном уменьшении расхода Q реализуется такой «сценарий» возникновения каждого очередного прорыва исходного барьера, при котором прорывы постепенно удаляются от оси симметрии течения. При этом величины критических расходов с ростом n также сближаются, стремясь к значению $Q = 1/\pi$, соответствующему $n \rightarrow \infty$.

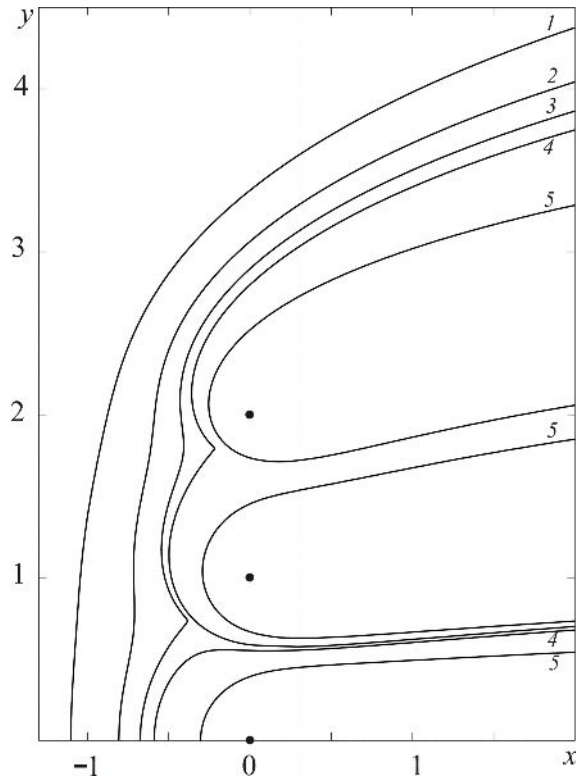


Рис. 9. Границы для потока в случае батареи пяти источников: кривые 1 – 5 соответствуют значениям $Q = 0.43, 0.39, Q_1 = 0.369, Q_2 = 0.352, 0.25$.

В §6 рассматривается взаимодействие загрязненного потока с нагнетательной скважиной заданного радиуса, на контуре которой давление считается постоянным.

При традиционном подходе, когда скважина моделируется точечным источником, известное решение задачи о нахождении границы-барьера для набегающего потока дает конфигурацию этой границы, которая с изменением расхода источника изменяется лишь подобно самой себе, причем точка нулевой скорости на границе не может совпасть с точкой, в которой находится источник. В окрестности источника течение носит радиальный характер. Введение в рассмотрение реальной величины радиуса скважины изменяет картину в ее окрестности, что требует специального анализа.

Вводится описывающий течение комплексный потенциал такой, что на окружности, соответствующей контуру скважины, он постоянен, а при больших значениях безразмерной комплексной координаты z этот комплексный потенциал асимптотически стремится к известному представлению для точечного источника:

$$W(Z) = -\frac{q}{2\pi} \ln Z - v \left(Z - \frac{R^2}{Z} \right) + C$$

Далее вводится зависящее от координат x, y и безразмерного расхода через окружность Q параметрическое переменное t :

$$t = \frac{y}{2Q} \left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right),$$

которое при $Q \geq 1$ позволяет выразить ординату y и абсциссу x искомой границы-барьера Γ через величины t и Q следующим образом:

$$y = Qt + (Q^2 t^2 - \sin^2 t)^{1/2}, \quad x = y \operatorname{ctg}(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

Показано, что при снижении расхода Q до критической величины $Q_0 = 1$ загрязненный поток достигает контура скважины. При этом касательная к границе Γ в точке ее соприкосновения с окружностью составляет с осью x угол, равный $2\pi/3$.

При $0 < Q < 1$ загрязненный поток втекает через часть окружности (контур скважины) внутрь, а из остальной части окружности жидкость вытекает. Получены соответствующие параметрические уравнения линий, ограничивающих втекающий и вытекающий потоки. При допущении, что внутри скважины потоки чистой и загрязненной жидкости равномерно перемешиваются, определена концентрация загрязнителя в потоке, вытекающем из скважины. Результаты иллюстрируются графиками (см. рис. 10). В частности, они показывают, что при значениях безразмерного расхода Q в диапазоне $0 < Q < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ течение в окрестности скважины существенно неоднородно.

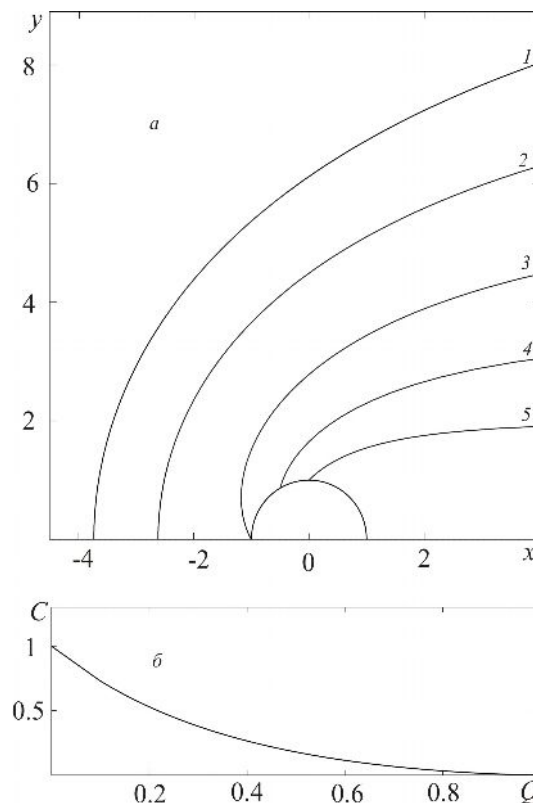


Рис. 10. Границы течения от скважины в потоке (а) для $Q = 2, 1.5, Q_0 = 1, 0.5, 0.001$ (линии 1 – 5); зависимость концентрации C жидкости, вытекающей из скважины, от величины Q (б).

Известное значение безразмерного критического расхода $Q_0 = 1$ позволяет оценить критический объемный расход скважины q_0 , при котором загрязненная жидкость достигает ее контура. Показано, что при достаточно малых расходах загрязнение может попасть внутрь скважины, следовательно, и в защищаемую ею область течения.

Полученная оценка сопоставлена с результатами §5. Установлено, что прорывы между скважинами в батарее возможны при значениях расхода скважины, значительно больших тех, для которых загрязненный поток может достичь ее контура.

В примечании к §6 в качестве возможной интерпретации исходной постановки задачи рассматривается натекание потенциального потока на контур в виде окружности с заданным на ней условием постоянства потенциала. Анализируется картина характерных линий тока внутри окружности, в центре которой в соответствии с видом комплексного потенциала расположены источник и диполь.

В заключении кратко подведены итоги проведенного исследования и описаны возможности практического использования полученных результатов.

Основные результаты работы, выносимые на защиту, перечислены в пункте **научная новизна**.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Скворцов Э.В. Управление потоком подземных вод через скважины / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Геометрическая теория функций, краевые задачи и их приложения. Материалы международной научной конференции (Казань, 18 – 24 марта 2002г.). – Казань: Казан. матем. об-во, 2002. – Т.14. – С. 254 – 259.
2. Скворцов Э.В. Моделирование управления потоком загрязненных подземных вод. / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // В сб.: На рубеже веков. НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева КГУ. 1998 – 2002 гг. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. – С. 329 – 337.
3. Скворцов Э.В. Гидробарьеры для загрязненных подземных вод / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Нелинейное моделирование и управление: Тезисы докладов международного семинара. – Самара, 2004г. – с. 48 – 49.
4. Скворцов Э.В. Моделирование гидробарьеров для потока загрязненных подземных вод / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Актуальные экологические проблемы Республики Татарстан: Тезисы докладов VI республиканской научной конференции. – Казань: Отечество, 2004г. – С. 207 – 208.
5. Скворцов Э.В. Управление потоками загрязненных подземных вод через скважины / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Ученые записки Казанского государственного университета. Естественные науки. – 2005. – Т. 147. – Кн. 1 – С. 21 – 31.
6. Скворцов Э.В. Взаимодействие скважин с потоком подземных вод / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2005. – №4. – С. 86 – 96.
7. Скворцов Э.В. Оценка опасности загрязнения водозабора в потоке подземных вод / Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева // Ученые записки Казанского государственного университета. Естественные науки. – 2006. – Т.148. – Кн. 4. – С. 100 – 104.
8. Скворцов Э.В. Взаимодействие батареи скважин с потоком подземных вод / Э.В.Скворцов, Д.Т.Суючева // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2007. - №4. – С. 49 – 53.